



centro adscrito a:



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

APUNTES Y EJERCICIOS

Seminario de matemáticas

Enric Pociello, Antonio Magaña
Marc Magaña, Abraham De la Rosa

Septiembre 2023

Índice

1. Cálculo algebraico	3
1.1. Operaciones con fracciones	3
1.2. Propiedades de las potencias. Fórmulas importantes	3
1.3. Polinomios	5
1.4. Radicales y logaritmos	8
2. Ecuaciones y desigualdades	11
2.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	13
2.2. Desigualdades.	14
Soluciones	15

1. Cálculo algebraico

1.1. Operaciones con fracciones

Ejercicio 1.

Efectua les operaciones que se indican con las fracciones siguientes:

1. $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3} - \frac{17}{21} + \frac{5}{3} =$

2. $\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7}\right) \frac{7}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{7} =$

3. $\left(\frac{3}{5} : \frac{2}{7} - \frac{11}{20}\right) \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} - 2\right) + \frac{11}{24} =$

4. $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) \frac{4}{7} + \frac{5}{21} - \frac{15}{21} =$

5. $\frac{11}{4} \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{3} + \frac{3}{4} =$

1.2. Propiedades de las potencias. Fórmulas importantes

Ejercicio 2.

Escriba en forma de una única potencia

1. $4^3 4^5 4^2$

2. $5^4 5$

3. $x^2 x^3 x^6$

4. $\frac{4^5}{4^2}$

5. $\frac{x^7}{x^3}$

6. $(3^2)^4$

1 Cálculo algebraico

7. $(x^2)^7$

8. $(3x)^2$

9. $(5x^2)^4$

Ejercicio 3.

Escriba en forma de potencia con exponente positivo

1. 3^{-4}

2. 5^{-3}

3. 10^{-6}

Ejercicio 4.

Escriba como potencia de x :

1. $x^4 \cdot x^{-5}$.

2. $\frac{x^5}{x^{-3}}$.

3. $(x^{-6})^{-2}$.

4. $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$.

Ejercicio 5.

Desarrolla las expresiones hasta que desaparezcan todos los paréntesis y simplifica el resultado:

1. $x^2 - (3x(x^2 - 2) - 2x^2(x + 1))$.

2. $4a((1 - a)2a^2 + (3a + 1)3a^2)$.

3. $5a(4a - 2(3a - 4b) + 5(4a - 3b))$.

4. $-4x(2x^2 + 3x((x - 1) - 5(x - 2)))$.

5. $5y^3 - (3y^3 - 2y(4y(y + 3) - 5y(2y + 6)))$.

1 Cálculo algebraico

6. $(0'5x - 0'4y - 0'3z)(10x - 20y + 30z)$.

7. $(a^2 + ab + b^2)(a - b)(a + b)$.

8. $(9x^2 - 3xy + y^2)(9x^2 + 5xy - y^2)$.

9. $(9x^2 - 6xy + 4y^2)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$.

10. $(-1'4x^2 - 2'5xy + 0'9y^2)(0'2x^2 - xy - 0'1y^2)$.

1.3. Polinomios

Ejercicio 6.

Si $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$, $q(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ i $r(x) = -3x^3 + x^2 + x - \frac{3}{2}$,
calcula

$$p(x) + q(x) - 2r(x) \quad \text{y} \quad p(x) \cdot q(x).$$

Ejercicio 7.

Efectua los productos de polinomios siguientes, reduciendo y ordenando el resultado:

1. $(4x^3 - 7x + 2x^2)(3x - 5x^2 + 7)$.

2. $(\frac{3}{4}x^3 - 2x + \frac{1}{2})(\frac{5}{2}x^3 - \frac{4}{3}x + x^2)$.

3. $(9x^5 - 3x^4 + 4x^3)(2x^2 - 5)$.

4. $(4x^2 + 2xy + y^2)(2x + y)(2x - y)$.

5. $(x - \frac{3}{4})(5x^2 - 1)(4x + 3)$.

Productos notables. Extracción de factor común

Ejercicio 8.

Desarrolla los productos y potencias siguientes:

1. $(x + y)(x - y)$.

1 Cálculo algebraico

2. $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$.

3. $(2x - 2y)^2$.

4. $(x + 3y)^2$.

5. $(2x - 4)(2x + 4)$.

6. $(\frac{1}{2}x + 2)^2$.

7. $(a - b)^3$.

8. $[(x + y)^2 + z]^2$.

Ejercicio 9.

Escribe las siguientes expresiones como producto de factores. Utiliza el mayor número de factores posible:

1. $3x^3y^3 - 3x^2y^2 + 12xy$.

2. $c^2(y + z)^2 - d^2(y + z)^2$.

3. $ax^2 + bx^2 - a - b$.

4. $ab^2 - b^2c - ad + cd$.

5. $a^2 - b^2 + ac - bc$.

Ejercicio 10.

Simplifica las fracciones siguientes:

1. $\frac{a}{a^2 + ab}$

2. $\frac{mn - rs}{amn - ars}$

3. $\frac{3y + 1}{9y^2 - 1}$

4. $\frac{a - 2}{a^2 - 4a + 4}$

1 Cálculo algebraico

5. $\frac{x^2}{x^3 + x^2}$

6. $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$

7. $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

8. $\frac{x^2 - 6x + 8}{2x^2 - 12x + 16}$

Ejercicio 11.

Realiza las siguientes operaciones simplificando al máximo el resultado:

1. $\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} - \frac{3}{2x}$.

2. $\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a^2 - a}$.

3. $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}$.

4. $\frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a+b}$.

5. $\frac{2ab}{12c^2} \cdot \frac{10bc}{a^3}$.

6. $\frac{b^2 + 2bc + c^2}{b^2 - 1} \cdot \frac{b+1}{b+c}$.

7. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab} \cdot \frac{4a}{a-b}$.

8. $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{4}{x^2 - 1}$

9. $\frac{x+1}{x-3} - \frac{4}{x+3} + \frac{5x-9}{x^2-9}$

10. $\frac{1}{1-x} + \frac{x}{1+x} + \frac{1+x^2}{1-x^2}$

Ejercicio 12.

Descompon en factores los polinomios de segundo grado siguientes:

1. $x^2 - 13x + 36$.

2. $2x^2 - 5x - 7$.

3. $9 - 4x^2$.

Ejercicio 13.

Simplifiqueu les fraccions algebraiques següents

1. $\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{3x^3 - 5x + 2}$

2. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

3. $\frac{3x^3 + 7x^2 - 2x - 8}{2x^3 + 5x^2 - x - 6}$

Ejercicio 14.

Calculeu

1. $\frac{3}{x+2} - \frac{x^2}{x^2+x-2} + \frac{x^2+1}{x-1}$

2. $\frac{a+1}{a-1} - \frac{(a^2+1)^2}{a^2-1}$

1.4. Radicales y logarítmos**Ejercicio 15.**

Escribe en forma de potencia las siguientes raíces

(a) $\sqrt[4]{23}$, (b) $\sqrt[3]{4^2}$, (c) $\sqrt[5]{3^4}$, (d) $\sqrt[4]{5^7}$.

Ejercicio 16.

Verifica si son ciertas las igualdades siguientes y corrígelas si son falsas:

$$\sqrt{49} = \pm 7, \quad \sqrt[4]{16} = \pm 2, \quad \sqrt[3]{-27} = 3, \quad \sqrt[3]{125} = \pm 5, \quad \sqrt{-25} = -5, \quad \sqrt[5]{-25} = -2.$$

Ejercicio 17.

Simplifica los radicales, sacando factores fuera de la raíz:

1. $\sqrt{192}$

2. $\sqrt[3]{108}$

3. $\sqrt{72a^2}$

4. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{-64(a+b)^3(a-b)}$

5. $\sqrt{8a^3 + 24a^2}$

6. $\sqrt{\frac{a-b}{(a-b)^2} \cdot \frac{a+b}{a^2-b^2}}$

Ejercicio 18.

Desarrolla y reduce las expresiones siguientes:

1. $(5\sqrt{3} - 7\sqrt{6})(2\sqrt{8} - 3)$

2. $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2})$

3. $(3\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{5})(2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{5})$

4. $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) - (3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})(\sqrt{3} + 2\sqrt{5})$

5. $(\sqrt{2} + 2)^2(1 - \sqrt{2})^2$

1 Cálculo algebraico



centro adscrito a:



Ejercicio 19.

Calcula las siguientes expresiones:

1. $(4 + \sqrt{5})^2$.
2. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$.
3. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$.

Ejercicio 20.

Calcula los siguientes logaritmos:

1. $\log 1000$
2. $\log_2 16$
3. $\log_3 \sqrt[5]{81}$
4. $\log_{1/2} 32$
5. $\log 0,0001$

Ejercicio 21.

Encuentra el valor de x en las siguientes igualdades:

1. $\log_x \frac{1}{\sqrt{8}} = -3/2$.
2. $\log_{25} \frac{1}{5} = x$.
3. $\log_x 25 = -4$.
4. $\log_x 125 = 3/2$.

2. Ecuaciones y desigualdades

Ejercicio 22.

Resuelve las ecuaciones siguientes:

1. $17x - 114 = 198 - 7x$.
2. $100t - 1 = 2t + 391$.
3. $9x - 3(5x - 6) = -30$.
4. $5(5 - 2x) - 7(2x - 5) = 12$.
5. $\frac{3y}{4} - \frac{4y}{5} + 8 = y - 55$.
6. $\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{5} = \frac{x-6}{7}$.
7. $\frac{5(2x-1)}{2} = 4x + \frac{15}{2}$.
8. $\frac{2x-6}{3x-8} = \frac{2x-5}{3x-7}$.

Ejercicio 23.

Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

1. $\sqrt{2x-4} = 4$.
2. $\sqrt{20+2x} = 4$.
3. $\sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x-1}$.
4. $\sqrt{x+19} = 12 - \sqrt{x-5}$.
5. $\sqrt{\frac{8x+1}{x-2}} = 5$.

Ejercicio 24.

Resuelve las ecuaciones de segundo grado siguientes:

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$.

2. $x^2 - 18x + 77 = 0$.

3. $x^2 - 17 = 130 - 2x^2$.

4. $x^2 + 2x + 1 = 0$.

5. $5x^2 + 20x = 0$.

6. $x^2 + x + 1 = 0$.

7. $\frac{x-5}{2} = \frac{2}{x-2}$.

8. $(x+2)^2 = 24 - 4x$.

9. $(x+6)(x-6) - 8 = 1 - 4x$.

10. $\frac{x}{5} - \frac{4}{x-9} = \frac{7}{3}$.

Ejercicio 25.

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones no lineales (ayuda: factoriza los polinomios):

1. $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

2. $(4x - 7)(x^2 - 5x + 4)(2x^2 - 7x + 3) = 0$.

3. $(3x^2 + 2x + 4)^2 - x^2(x + 8)^2 = 0$.

4. $(x^3 + 3x^2 - 1)^2 - (x^3 - 2x + 1)^2 = 0$.

5. $\frac{x^2 - 32}{4} + \frac{28}{x^2 - 9} = 0$.

Ejercicio 26.

Resuelve las siguientes ecuaciones que involucran radicales:

1. $x + 2\sqrt{x-1} - 4 = 0.$

2. $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3.$

Ejercicio 27.

Resuelve las ecuaciones logarítmicas siguientes:

1. $\log 2 + \log(x-3) = \log \sqrt{2x}.$

2. $1 + 2 \log x = \log 4 + \log 5x.$

3. $2 \log x - \log(x-16) = 2.$

4. $\log(x+1) - \log x = 1.$

2.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**Ejercicio 28.**

Resuelve los siguientes sistemas:

1.
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 37 \\ -x + 4y = 23 \end{array} \right\}$$

2.
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 5y = 3 \end{array} \right\}$$

3.
$$\left. \begin{array}{l} x = 18y \\ 5x - 71y = 19 \end{array} \right\}$$

4.
$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ 2x + 4y = 6 \end{array} \right\}$$

5.
$$\left. \begin{array}{l} 2(x-3) - (y-4) = 2(4x-2y) - 8 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = -1 \end{array} \right\}$$

2.2. Desigualdades.

Ejercicio 29.

Determina todos los valores de x que satisfacen las desigualdades siguientes:

1. $3x - 2 < x$.

2. $7x - 9 > 4x$.

3. $\frac{2}{3}(4x - 6) + \frac{1}{2}(3x + 2) \leq \frac{3}{4}(2x - 7)$.

4. $\frac{3}{4} < \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x \leq \frac{9}{4}$.

5. $x^2 > 2x + 3$.

6. $4 + 19x - 5x^2 \geq 0$.

7. $(x - 1)(1 - 3x) < 0$.

8. $x^3 - 4x^2 - 5x \leq 0$.

9. $x - 2 > \frac{1}{x + 2}$.

10. $\frac{x - 3}{2x - 2} \leq 1$.

11. $\frac{3x - 2}{5 - 3x} \geq 1$.

Soluciones

Solución 1.

1. $38/21$
2. $31/14$
3. $209/120$
4. $6/7$
5. 3

Solución 2.

1. 4^{10}
2. 5^5
3. x^{11}
4. 4^3
5. x^4
6. 3^8
7. x^{14}
8. $9x^2$
9. $625x^8$

Solución 3.

1. $\frac{1}{3^4}$
2. $\frac{1}{5^3}$
3. $\frac{1}{10^6}$

Solució 4.

(a) x^{-1} . (b) x^8 . (c) x^{12} . (d) x .

Solució 5.

1. $6x + 3x^2 - x^3$.
2. $20a^3 + 28a^4$.
3. $90a^2 - 35ab$.
4. $40x^3 - 108x^2$.
5. $-10y^3 - 36y^2$.
6. $5x^2 - 14xy + 12xz + 8y^2 - 6yz - 9z^2$.
7. $a^4 + a^3b - ab^3 - b^4$.
8. $81x^4 + 18x^3y - 15x^2y^2 + 8xy^3 - y^4$.
9. $81x^4 + 36x^2y^2 + 16y^4$.
10. $-0'28x^4 + 0'9x^3y + 2'82x^2y^2 - 0'65xy^3 - 0'09y^4$.

Solució 6.

$11x^3 - 4x$. $4x^6 + 14x^5 - 19x^4 + 13x^3 - 27x^2 + 17x - 10$

Solució 7.

1. $-20x^5 + 2x^4 + 69x^3 - 7x^2 - 49x$.
2. $\frac{15}{8}x^6 + \frac{3}{4}x^5 - 6x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{19}{6}x^2 - \frac{2}{3}x$.
3. $18x^7 - 6x^6 - 37x^5 + 15x^4 - 20x^3$.
4. $16x^4 + 8x^3y - 2xy^3 - y^4$.
5. $20x^4 - \frac{61}{4}x^2 + \frac{9}{4}$.

Solució 8.

1. $x^2 - y^2$.

2. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$.

3. $4x^2 - 8xy + 4y^2$.

4. $x^2 + 6xy + 9y^2$.

5. $4x^2 - 16$.

6. $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$.

7. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

8. $[x^2 + 2xy + y^2 + z]^2 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 2x^2z + 4xy^3 + 4xyz + 2y^2z + y^4 + z^2$.

Solució 9.

1. $3xy(x^2y^2 - xy + 4)$.

2. $(c + d)(c - d)(y + z)^2$.

3. $(a + b)(x + 1)(x - 1)$.

4. $(a - c)(b^2 - d)$.

5. $(a - b)(a + b + c)$.

Solució 10.

1. $\frac{1}{a + b}$.

2. $\frac{1}{a}$.

3. $\frac{1}{3y - 1}$.

4. $\frac{1}{a - 2}$.

5. $\frac{1}{x + 1}$.

2 Ecuaciones y desigualdades

6. $x - 1$

7. $\frac{x}{x + 1}$

8. $\frac{1}{2}$

Solución 11.

1. $\frac{x - 2}{2x^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2}$.

2. $\frac{a + 1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$.

3. $\frac{2n}{n^2 - 1}$.

4. $\frac{b}{a^2 - b^2}$.

5. $\frac{5b^2}{3a^2c}$.

6. $\frac{b + c}{b - 1}$.

7. 4.

8. $\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 - 1}$

9. $\frac{x + 2}{x - 3}$

10. $\frac{-2}{x - 1}$

Solución 12.

1. $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$.

2. $2x^2 - 5x - 7 = (x + 1)(2x - 7)$.

3. $9 - 4x^2 = (3 - 2x)(3 + 2x)$.

Solució 13.

1. $\frac{x^2 - x + 3}{3x^2 + 3x - 2}$

2. $\frac{x - 3}{x - 2}$

3. $\frac{3x + 4}{2x + 3}$

Solució 14.

1. $\frac{x^3 + x^2 + 4x - 1}{x^2 + x - 2}$

2. $-a \frac{a^2 + a + 2}{a + 1} = -a \left(a + \frac{2}{a + 1} \right)$

Solució 15.

1. $23^{\frac{1}{4}}$

2. $4^{\frac{2}{3}}$

3. $3^{\frac{4}{5}}$

4. $5^{\frac{7}{4}}$

Solució 16.

$\sqrt{49} = \pm 7$, certa, ja que $(\pm 7)^2 = 49$;

$\sqrt[4]{16} = \pm 2$, certa, ja que $(\pm 2)^4 = 16$;

$\sqrt[3]{-27} = 3$, falsa; la correcta és $\sqrt[3]{-27} = -3$;

$\sqrt[3]{125} = \pm 5$, falsa; la correcta és $\sqrt[3]{125} = 5$;

$\sqrt{-25} = -5$, falsa; no existe ningú número real que su cuadrado sea -25 ;
en particular, $(-5)^2 = 25$;

$\sqrt[5]{-25} = -2$, certa, ja que $(-2)^5 = -2^5$.

Solució 17.

1. $\sqrt{192} = 8\sqrt{3}$.
2. $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$.
3. $\sqrt{72a^2} = 6\sqrt{2}a$.
4. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{-64(a+b)^3(a-b)} = (a+b)\sqrt[3]{b-a}$.
5. $\sqrt{8a^3 + 24a^2} = 2a\sqrt{2(a+3)}$.
6. $\sqrt{\frac{a-b}{(a-b)^2} \cdot \frac{a+b}{a^2-b^2}} = \frac{1}{a-b}$.

Solució 18.

1. $41\sqrt{6} - 71\sqrt{3}$.
2. $42\sqrt{10} - 174$.
3. $114 + 24\sqrt{10}$.
4. $32 + \sqrt{15}$.
5. 2.

Solució 19.

1. $21 + 8\sqrt{5}$.
2. $5 + 2\sqrt{6}$.
3. $\frac{1}{6}$.

Solució 20.

1. 3.
2. 4.
3. $\frac{4}{5}$.
4. -5.

2 Ecuaciones y desigualdades



centro adscrito a:



5. -4 .

Solución 21.

1. $x = 2$.

2. $x = -1/2$.

3. $x = 1/\sqrt{5}$.

4. $x = 25$.

Solución 22.

1. $x = 13$.

2. $t = 4$.

3. $x = 8$.

4. $x = 2$.

5. $y = 60$.

6. $x = 104$.

7. $x = 10$.

8. $x = 2$.

Solución 23.

1. $x = 10$.

2. $x = -2$.

3. $x = 5$.

4. $x = 30$.

5. $x = 3$.

Solució 24.

1. $x = 6, x = 2$.
2. $x = 7, x = 11$.
3. $x = -7, x = 7$.
4. $x = -1$.
5. $x = 0, x = -4$.
6. No té solució.
7. $x = 1, x = 6$.
8. $x = 2, x = -10$.
9. $x = 5, x = -9$.
10. $x = 15, x = \frac{17}{3}$.

Solució 25.

1. $x = 2$ i $x = -2$.
2. $x = \frac{7}{4}, x = 4, x = 1, x = 3$ i $x = \frac{1}{2}$.
3. $x = 1, x = 2, x = -\frac{1}{2}$ i $x = -2$.
4. $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = -2, x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$ i $x = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$.
5. $x = 4, x = -4, x = 5$ i $x = -5$.

Solució 26.

1. $x = 2$.
2. $x = 5$.

Solució 27.

1. $x = 9/2$.
2. $x = 2$.
3. $x = 20$ i $x = 80$.
4. $x = 1/9$.

Solució 28.

1. $x = 25$, $y = 12$.
2. $x = 2$, $y = 1$.
3. $x = 18$, $y = 1$.
4. $x = \frac{11}{5}$, $y = \frac{2}{5}$.
5. $x = 4$, $y = 6$.

Solució 29.

1. $x < 1$.
2. $x > 3$.
3. $x \leq -\frac{27}{32}$.
4. $-\frac{19}{10} \leq x < -\frac{1}{10}$.
5. $x < -1$ ó $x > 3$.
6. $-\frac{1}{5} \leq x \leq 4$.
7. $x < \frac{1}{3}$ ó $x > 1$.
8. $x \leq -1$ ó $0 \leq x \leq 5$.
9. $-\sqrt{5} < x < -2$ ó $x > \sqrt{5}$.
10. $x \leq -1$ ó $x \geq 1$.
11. $\frac{7}{6} \leq x \leq \frac{5}{3}$.